Examen blanc

Sujet N ° 1

Matière : Mathématiques

Classe : 2 Bac SVT&SPF

Année scolaire : 2024/2025

Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2} \end{cases}$

1/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n > 3$.

2/ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

a/ Montrer que (w_n) est une suite arithmétique.

b/ En déduire w_n et u_n en fonction de n.

c/ Déterminer la limite de la suite (u_n).

3/ Calculer en fonction de n la somme : $S_n = w_0 + w_1 + \cdots\cdots\cdots + w_n$.

Exercice 2

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 10z + 26 = 0$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 5 - i$, $b = 2 + 3i$, $c = 4i$ et $d = 6 + i$.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2.

a/ Montrer que D est l'image du point C par l'homothétie h.

b/ Montrer que $\dfrac{a-d}{b-d} = \dfrac{1}{2}i$.

c/ En déduire que le triangle ABD est rectangle et que $BD = 2AD$.

3/ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan vérifiant : $|z - 5 + i| = |z - 4i|$.

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(2;2;1)$, $B(3;1;1)$, $C(1;1;-1)$ et $I(2;0;2)$.

1/ Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ et en déduire que $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2/ a/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par I et perpendiculaire au (ABC).

b/ Déterminer les coordonnées de H l'intersection de la droite (D) et le plan (ABC).

3/ On considère la sphère (S) de centre I et qui coupe le plan (ABC) en un cercle (C) de centre B et de rayon 1

a/ Montrer que la distance du point I au plan (ABC) est $d(I;(ABC)) = \sqrt{3}$.

b/ En déduire que le rayon de la sphère (S) est $R = 2$ puis déterminer son équation cartésienne.

Exercice 4

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : trois boules blanches numérotées 2-2-1, quatre boules rouge numérotées 2-1-1-1 et une boule verte porte le numéro 1

On tire simultanément trois boules de l'urne

Soit les évènements suivants :

A : Les trois boules tirées portent le même couleur

B : Une boule au plus porte le numéro 1

1/ Montrer que $P(A)=\frac{5}{56}$ et $P(B)=\frac{2}{7}$

2/ Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules qui portent le numéro 1.

a/ Vérifier que $X=\{0;1;2;3\}$

b/ Montrer que $P(X=1)=\frac{15}{56}$ et $P(X=2)=\frac{15}{28}$

c/ Préciser la loi de probabilité de X

Problème

A/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2\ln(x)+1+\frac{3}{x^2}$

1/ a/ Montrer que $g'(x)=\frac{2(x^2-3)}{x^3}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b/ En déduire que la fonction g est décroissante sur $]0;\sqrt{3}]$ est croissante sur $[\sqrt{3};+\infty[$.

2/ a/ Montrer que $g(\sqrt{3})=2+\ln 3$ puis vérifier que $g(\sqrt{3})>0$.

b/ En déduire que $g(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(x^2+3)\ln x$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

tel que $\|\vec{\imath}\|=1cm$ et $\|\vec{\jmath}\|=2cm$

1/ Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (On pourra remarquer que $\frac{f(x)}{x}=\frac{(x^2+3)}{x}\ln x$).

b/ En déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique et déterminer sa direction.

3/ a/ Montrer que $f'(x)=xg(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b/ Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4/ a/ Montrer que $f''(x)=\frac{2x^2\ln x+3(x^2-1)}{x^2}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b/ Montrer que $2x^2\ln x$ et $3(x^2-1)$ ont le même signe sur $]0;1]$ et déduire que $f''(x)\le 0$ pour tout $x\in]0;1]$.

c/ Montrer que $2x^2\ln x$ et $3(x^2-1)$ ont le même signe sur $[1;+\infty[$ et déduire que $f''(x)\ge 0$ pour tout $x\in[1;+\infty[$.

d/ En déduire que la courbe (C_f) admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

5/ Montrer que $y=4x-4$ est l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

6/ Construire (C_f) et (T) dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

7/ a/ Montrer que la fonction $H:x\mapsto\frac{x^3}{3}+3x$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto x^2+3$ sur $\mathbb{R}$.

b/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^e (x^2+3)\ln(x)dx=\frac{2}{9}(14+e^3)$.

c/ Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Correction

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2} \end{cases}$

1/ Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n > 3$.

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 5$ donc $u_0 > 3$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 3$ et montrons que $u_{n+1} > 3$.

Nous avons : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2} - 3 = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$.

Comme $u_n > 3$, alors $\dfrac{u_n - 3}{u_n - 2} > 0$ d'où : $u_{n+1} > 3$.

• Conclusion : d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_n > 3$.

2/ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

a/ Montrons que (w_n) est une suite arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons : $w_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 3} = \dfrac{1}{\dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2} - 3} = \dfrac{1}{\dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}} = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$.

Donc : $w_{n+1} - w_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3} - \dfrac{1}{u_n - 3} = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 3} = 1$.

Ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = 1$.

b/ Déduisons w_n et u_n en fonction de n.

• Puisque la suite (w_n) est arithmétique, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad w_n = w_0 + nr$.

Nous avons : $w_0 = \dfrac{1}{u_0 - 3} = \dfrac{1}{5 - 3} = \dfrac{1}{2}$ et $r = 1$.

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\quad w_n = \dfrac{1}{2} + n$.

• Ecrivons u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Ecrivons premièrement u_n en fonction de w_n .

Nous avons : $w_n = \dfrac{1}{u_n - 3} \Leftrightarrow u_n - 3 = \dfrac{1}{w_n}$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{w_n} + 3$$

Et puisque $w_n = \dfrac{1}{2} + n$, alors $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + n} + 3$.

c/ Déterminons la limite de la suite (u_n).

Nous avons : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + n} + 3$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}+n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}+n}=0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

3/ Calculons en fonction de n la somme : $S_n = w_0 + w_1 + \cdots\cdots\cdots + w_n$.

Puisque la suite (w_n) est arithmétique, alors : $S_n = \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n)$

C'est-à-dire $S_n = \frac{n+1}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+n\right)\right]$ ou encore $S_n = \frac{n+1}{2}(1+n)$ d'où $S_n = \frac{(n+1)^2}{2}$.

Exercice 2

1/ Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 10z + 26 = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 10^2 - 4\times 26 = -4 = (2i)^2$.

Les solutions de cette équation sont $z_1 = \frac{10-2i}{2} = 5-i$ et $z_2 = \frac{10+2i}{2} = 5+i$

2/ a/ Montrons que D est l'image du point C par l'homothétie h .

Il suffit de montrer que $d - b = -2(c-b)$ ou encore $-2(c-b)+b = d$

Nous avons : $-2(c-b)+b = -2(4i-(2+3i))+2+3i$

$$\begin{aligned} &= -2(i-2)+2+3i \\ &= -2i+4+2+3i \\ &= 6+i \\ &= d \end{aligned}$$

Donc D est l'image du point C par l'homothétie h .

b/ Montrons que $\frac{a-d}{b-d} = \frac{1}{2}i$.

Nous avons : $\frac{a-d}{b-d} = \frac{5-i-(6+i)}{2+3i-(6+i)} = \frac{-1-2i}{-4+2i}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1-2i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)} \\ &= \frac{4+2i+8i-4}{16+4} \\ &= \frac{10i}{20} = \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

c/ Déduisons que le triangle ABD est rectangle et que $BD = 2AD$.

Nous avons : $\frac{a-d}{b-d} = \frac{1}{2}i$

Donc $\arg\left(\frac{a-d}{b-d}\right) \equiv \arg\left(\frac{1}{2}i\right)[2\pi]$ et $\frac{|a-d|}{|b-d|} = \left|\frac{1}{2}i\right|$

C'est-à-dire $\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\frac{DA}{DB} = \frac{1}{2}$

D'où le triangle ABD est rectangle en D et $BD = 2AD$.

3/ Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ du plan vérifiant : $|z-5+i| = |z-4i|$.

Remarquons que $|z-5+i| = |z-4i| \Leftrightarrow |z-a| = |z-c|$

Donc $|z-5+i| = |z-4i| \Leftrightarrow AM = CM$

D'où cet ensemble est la médiatrice du segment $[AC]$.

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2;2;1)$, $B(3;1;1)$, $C(1;1;-1)$ et $I(2;0;2)$.

1/ Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ et déduisons que $x+y-z-3=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

On détermine d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Nous avons : $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;0;-2)$.

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$

C'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$

Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors c'est un vecteur normal au plan (ABC).

Par suite : une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme : $2x+2y-2z+d=0$

Il reste à trouver d, on a $A\in(ABC)\Leftrightarrow 2\times2+2\times2-2\times1+d=0$

$$\Leftrightarrow d=-6$$

D'où l'équation du plan (ABC) est $2x+2y-2z-6=0$ ou encore $x+y-z-3=0$

2/ a/ Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D) passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2;2;-2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) alors le vecteur $\vec{u}(1;1;-1)$ est aussi un vecteur directeur de la droite (D).Comme la droite (D) passe par le point $I(2;0;2)$, alors une représentation paramétrique de la droite (D) est $\begin{cases}x=2+\alpha\\ y=\alpha \qquad (\alpha\in\mathbb{R})\\ z=2-\alpha\end{cases}$

b/ Déterminons les coordonnées de H l'intersection de la droite (D) et le plan (ABC).

Les coordonnées de H sont la solution du système :

$$\begin{cases}x=2+\alpha\\ y=\alpha\\ z=2-\alpha\\ x+y-z-3=0\end{cases}\qquad(\alpha\in\mathbb{R})$$

On résout ce système en substituant les trois premières équations dans la dernière.

On obtient $2+\alpha+\alpha+2-\alpha-3=0\Leftrightarrow\alpha=-1$

Ensuite, on remplace la valeur du paramètre α par -1 dans la représentation paramétrique de la droite (D), on trouve $H(1;-1;3)$

3/ a/ Montrons que la distance du point I au plan (ABC) est $d\left(I;(ABC)\right)=\sqrt{3}$.

On sait que $d\left(I;(ABC)\right)=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

C'est-à-dire $d\left(I;(ABC)\right)=\dfrac{|2+0-2-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

Donc la distance du point I au plan (ABC) est $d\left(I;(ABC)\right)=\sqrt{3}$.

b/ Déduisons que le rayon de la sphère (S) est $R=2$ puis déterminons son équation cartésienne.

On sait que $R=\sqrt{r^2+d^2}$ avec r est le rayon du cercle (C) et $d=d\left(I;(ABC)\right)$

Donc $R=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$

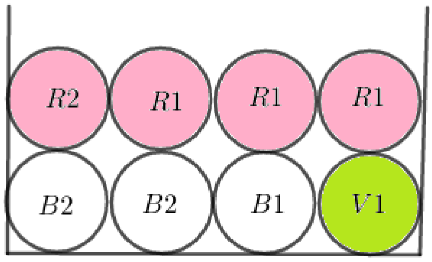
Ainsi l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre $I(2;0;2)$ et de rayon $R=2$ est

$(x-2)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=2^2$, ou encore $x^2+y^2+z^2-4x-4z+4=0$

Exercice 4

On tire simultanément trois boules de l'urne

Soit les évènements suivants :



A : Les trois boules tirées portent le même couleur

B : Une boule au plus porte le numéro 1

1/ Montrons que $P(A)=\frac{5}{56}$ et $P(B)=\frac{2}{7}$

L'éventualité Ω est une combinaison de 3 éléments parmi 8.

Donc $Card(\Omega)=C_8^3=56$

L'évènement A est réalisé si on obtient des tirages de la forme : $\{B2,B2,B1\}$ ou $\{R1,R1,R1\}$ ou $\{R1,R1,R2\}$

Donc $Card(A)=C_2^2\times C_1^1+C_3^3+C_3^2\times C_1^1=5$

D'où $P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{5}{56}$

<u>Remarque</u>

L'évènement A est réalisé si les trois boules tirées portent les couleurs : $\{B,B,B\}$ ou $\{R,R,R\}$

Donc $Card(A)=C_3^3+C_4^3=5$

D'où $P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{5}{56}$

L'évènement B est réalisé si on obtient des tirages de la forme : $\{1;2;2\}$ ou $\{2;2;2\}$

Donc $Card(B)=C_5^1\times C_3^2+C_3^3=16$

D'où $P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$

2/ Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules qui portent le numéro 1.

a/ Vérifions que $X=\{0;1;2;3\}$

On a 4 possibilités pour X :

Les trois boules portent le numéro 1, donc $X=3$

Deux boules portent le numéro 1 et une boule porte le numéro 2, donc $X=2$

Deux boules portent le numéro 2 et une boule porte le numéro 1, donc $X=1$

Les trois boules portent le numéro 2 donc $X=0$

D'où $X=\{0;1;2;3\}$

b/ Montrons que $P(X=1)=\frac{15}{56}$ et $P(X=2)=\frac{15}{28}$

*/ Nous avons les tirages possibles pour obtenir $X=1$ est $\{2,2,1\}$

Donc $Card(X=1)=C_3^2\times C_5^1=15$

D'où $P(X=1)=\frac{Card(X=1)}{Card(\Omega)}=\frac{15}{56}$

*/ Nous avons les tirages possibles pour obtenir $X=2$ est $\{1,1;2\}$

Donc $Card(X=2)=C_5^2\times C_3^1=30$

D'où $P(X=2)=\dfrac{Card(X=2)}{Card(\Omega)}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$

c/ Précisons la loi de probabilité de X

On a $P(X=1)=\dfrac{15}{56}$ et $P(X=2)=\dfrac{15}{28}$

Il reste de calculer $P(X=0)$ et $P(X=3)$

*/ Nous avons le tirage possible pour obtenir $X=0$ est $\{B2,B2,R2\}$

Donc $Card(X=0)=C_2^2\times C_1^1=1$

D'où $P(X=0)=\dfrac{Card(X=0)}{Card(\Omega)}=\dfrac{1}{56}$

*/ Nous avons les tirages possibles pour obtenir $X=3$ est $\{1;1;1\}$

Donc $Card(X=3)=C_5^3=10$

D'où $P(X=3)=\dfrac{Card(X=3)}{Card(\Omega)}=\dfrac{10}{56}$

*/ Une autre méthode pour calculer $P(X=3)$

O sait que $P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)=1$

Donc $P(X=3)=1-P(X=1)-P(X=2)-P(X=0)$

C'est-à-dire $P(X=3)=1-\dfrac{15}{56}-\dfrac{15}{28}-\dfrac{1}{56}$

Ce qui donne $P(X=3)=\dfrac{10}{56}$

*/ On résume la loi de probabilité de la variable X dans le tableau suivant :

$X=k$	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\dfrac{1}{56}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{10}{56}$

Problème

A/Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2\ln(x)+1+\dfrac{3}{x^2}$

1/ a/ Montrons que $g'(x)=\dfrac{2(x^2-3)}{x^3}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Soit $x\in]0;+\infty[$

Nous avons : $g'(x)=(2\ln(x)+1+\dfrac{3}{x^2})'=2\dfrac{1}{x}+0+3\times\dfrac{-2}{x^3}$

$$=\frac{2x^2-6}{x^3}$$

$$=\frac{2(x^2-3)}{x^3}$$

b/ Déduisons que la fonction g est décroissante sur $]0;\sqrt{3}]$ est croissante sur $[\sqrt{3};+\infty[$.

Soit $x\in]0;+\infty[$

Nous avons : $g'(x)=\dfrac{2(x^2-3)}{x^3}$

Si $x\in\left]0;\sqrt{3}\right]$ alors $0<x\le\sqrt{3}$ donc $0<x^2\le 3$ par conséquent $\dfrac{2(x^2-3)}{x^3}\le 0$

C'est-à-dire $g'(x)\le 0$

Si $x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right[$ alors $x\ge\sqrt{3}$ donc $x^2\ge 3$ par conséquent $\dfrac{2(x^2-3)}{x^3}\ge 0$

C'est-à-dire $g'(x)\ge 0$

D'où la fonction g est décroissante sur $\left]0;\sqrt{3}\right]$ est croissante sur $\left[\sqrt{3};+\infty\right[$.

2/ a/ Montrons que $g(\sqrt{3})=2+\ln 3$ puis vérifions que $g(\sqrt{3})>0$.

Nous avons : $g(\sqrt{3})=2\ln(\sqrt{3})+1+\dfrac{3}{\sqrt{3}^2}=\ln(\sqrt{3}^2)+1+1=2+\ln(3)$

Puisque $3>1$ alors $\ln 3>0$ donc $2+\ln 3=g(\sqrt{3})>0$

b/ Déduisons que $g(x)>0$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

Puisque la fonction g est décroissante sur $\left]0;\sqrt{3}\right]$ est croissante sur $\left[\sqrt{3};+\infty\right[$, alors $g(\sqrt{3})$ est une valeur minimale de g sur $\left]0;+\infty\right[$

Donc $g(x)>g(\sqrt{3})$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

Or $g(\sqrt{3})>0$ alors $g(x)>0$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=(x^2+3)\ln x$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\|=1cm$ et $\|\vec{\jmath}\|=2cm$

1/ Montrons que $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ puis interprétons géométriquement le résultat obtenu.

Nous avons : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+3)\,ln\,x=-\infty$

Car $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+3)=3$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}ln\,x=-\infty$

<u>Interprétation géométrique :</u>

La droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale de la courbe (C_f)

2/ a/ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

*/ Nous avons : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)\,ln\,x=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

*/ Nous avons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+3)}{x}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+3)}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}\times\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$ b/

Déduisons que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique et déterminons sa direction.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de $+\infty$

3/ a/ Montrer que $f'(x)=xg(x)$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$

Nous avons : $f'(x)=((x^2+3)\ln x)'$

$$= (x^2+3)'\ln x + (x^2+3)(\ln x)'$$
$$= 2x\ln x + (x^2+3)\times\frac{1}{x}$$
$$= 2x\ln x + x + \frac{3}{x}$$
$$= x\left(2\ln x + 1 + \frac{3}{x^2}\right)$$
$$= xg(x)$$

b/ Etudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis déduisons que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Soit $x\in]0;+\infty[$

Nous avons : $x>0$, $g(x)>0$ (d'après la question A/ 2/ b/) et $f'(x)=xg(x)$

Donc $f'(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Par conséquent f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4/ a/ Montrons que $f''(x)=\dfrac{2x^2\ln x+3(x^2-1)}{x^2}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Soit $x\in]0;+\infty[$

Nous avons : $f''(x)=(f'(x))'=(xg(x))'=x'g(x)+xg'(x)$

$$=1\times\left(2\ln(x)+1+\frac{3}{x^2}\right)+x\times\left(\frac{2(x^2-3)}{x^3}\right)$$
$$=\frac{2x^2\ln(x)}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}+\frac{2x^2-6}{x^3}$$
$$=\frac{2x^2\ln x+3(x^2-1)}{x^2}$$

b/ Montrons que $2x^2\ln x$ et $3(x^2-1)$ ont le même signe sur $]0;1]$ et déduire que $f''(x)\leq 0$ pour tout $x\in]0;1]$.

Soit $x\in]0;1]$

Donc : $\ln x\leq 0$ et $x^2\leq 1$

Donc $2x^2\ln x\leq 0$ et $3(x^2-1)\leq 0$

Ainsi $2x^2\ln x$ et $3(x^2-1)$ ont le même signe (négatif) sur $]0;1]$

Et on a $2x^2\ln x+3(x^2-1)\leq 0$

Donc $\dfrac{2x^2\ln x+3(x^2-1)}{x^2}\leq 0$

C'est à dire $f''(x)\leq 0$

c/ Montrons que $2x^2\ln x$ et $3(x^2-1)$ ont le même signe sur $[1;+\infty[$ et déduire que $f''(x)\geq 0$ pour tout $x\in [1;+\infty[$.

Soit $x\in [1;+\infty[$

Donc : $\ln x\geq 0$ et $x^2\geq 1$

Donc $2x^2\ln x\geq 0$ et $3(x^2-1)\geq 0$

Ainsi $2x^2\ln x$ et $3(x^2-1)$ ont le même signe (positif) sur $[1;+\infty[$

Et on a $2x^2\ln x+3(x^2-1)\geq 0$

Donc $\dfrac{2x^2\ln x+3(x^2-1)}{x^2}\geq 0$

C'est à dire $f''(x)\geq 0$

d/ Déduisons que la courbe (C_f) admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

On a $f''(x)\leq 0$ pour tout $]0;1]$ et $f''(x)\geq 0$ pour tout $[1;+\infty[$.

De plus $f''(1)=0$

Donc f'' s'annule en 1 et change de signe

Par conséquent le point $A(1;f(1))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

5/ Montrons que $y=4x-4$ est l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

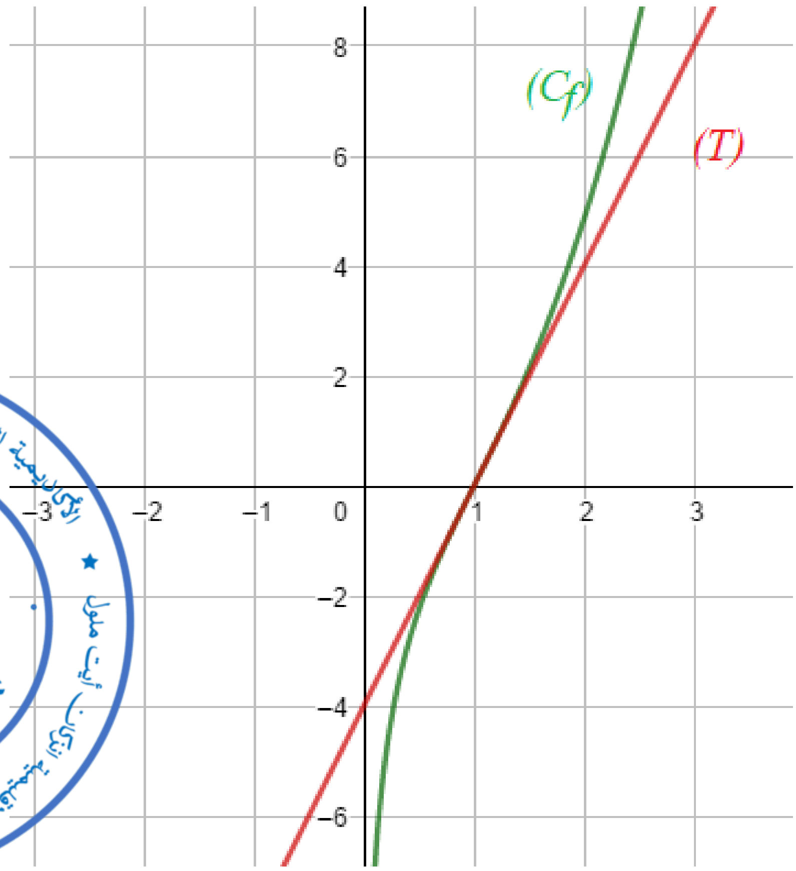
L'équation de la tangente (C_f) au point d'abscisse 1 est donnée par : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

Nous avons $f'(1)=1\left(2\ln 1+1+\dfrac{3}{1^2}\right)=4$ et $f(1)=(1^2+3)\ln 1=0$

Donc $(T): y=4(x-1)+0$

Ce qui donne $(T): y=4x-4$

6/ Construisons (C_f) et (T) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



7/ a/ Montrons que la fonction $H: x\mapsto \dfrac{x^3}{3}+3x$ est une primitive de la fonction $h: x\mapsto x^2+3$ sur $\mathbb{R}$.

Nous avons H est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynômiale) et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $H'(x)=(\dfrac{x^3}{3}+3x)'=x^2+3=h(x)$.

Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

b/ Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^e (x^2+3)\ln(x)dx=\dfrac{2}{9}(14+e^3)$

Nous avons $\int_1^e (x^2+3)\ln(x)dx=\int_1^e h(x)\ln(x)dx=\int_1^e H'(x)\ln(x)dx$

Donc $\int_1^e (x^2+3)\ln(x)dx=\left[H(x)\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e H(x)(\ln(x))'dx$

C'est-à-dire : $\int_1^e (x^2+3)\ln(x)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\times\frac{1}{x}dx$

$$= \frac{e^3}{3}+3e-\int_1^e \frac{x^2}{3}+3dx$$

$$= \frac{e^3}{3}+3e-\left[\frac{x^3}{9}+3x\right]_1^e$$

$$= \frac{e^3}{3}+3e-\frac{e^3}{9}-3e+\frac{1}{9}+3$$

$$= \frac{2e^3+28}{9}$$

$$= \frac{2}{9}(14+e^3)$$

c/ Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

On sait que l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$et $x = e$est : $\int_1^e |f(x)|dx \times \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ avec $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| = 2cm^2$

Nous avons $\int_1^e |f(x)|dx = \int_1^e \left|(x^2+3)\ln(x)\right|dx$

$$= \int_1^e (x^2+3)\ln(x)dx \qquad (\text{Car } x^2+3 \geq 0 \text{ et } ln\, x \geq 0 \text{ pour } x \in [1;e])$$

$$= \frac{2}{9}(14+e^3) \quad (\text{D'après la question précédente})$$

Ainsi l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations :

$x = 1$ et $x = e$ est $A = \frac{4}{9}(14+e^3)cm^2$

Examen blanc

Sujet N ° 2

Matière : Mathématiques

Classe : 2 Bac SVT&SPF

Année scolaire : 2024/2025

Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6} \end{cases}$

1/ a/ Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-1 < u_n < 3$.

b/ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n+1)(u_n-3)}{u_n+6}$ et déduire que la suite (u_n) est croissante.

2/ On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

a/ Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b/ Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

3/ Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

A/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

B/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

1/ a/ Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes a et b.

b/ Montrer que $a^{12} + b^{12} = 2^{12}\left(1 - (2+\sqrt{3})^6\right)$

2/ Soit C un point du plan complexe tels que $OA = OC$ et $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

a/ Montrer que $|c| = 2$ et $\arg(c) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ (c est l'affixe du point C).

b/ En déduire que $c = 1 + \sqrt{3}i$ et vérifier que $b = a + c$.

c/ Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0;0;-1)$, $B\left(-1;1;\dfrac{1}{2}\right)$, $C(0;1;0)$ et la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$.

1/ a/ Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\dfrac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

b/ Montrer que l'équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + 2z + 2 = 0$

2/ Montrer que (S) est de centre $\Omega(1;-2;-2)$ et de rayon $R = 2$.

3/ Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un cercle (C) de rayon $r = \sqrt{3}$.

4/ Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a/ Montrer que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D)

b/ Montrer que le centre du cercle (C) est le point $H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{8}{3}\right)$

5/ Soit $K(a;b;-1)$ un point de la sphère (S) tel que a et b des nombres réels. On considère le plan (P)

d'équation cartésienne $(a-1)x+(b+2)y+z-a+2b+3=0$

a/ Montrer que K appartient au plan (P).

b/ Montrer que le plan (P) est tangente à la sphère (S) au point K.

Exercice 4

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : trois boules blanches numérotées 2-1-1, deux boules rouges numérotées 1-1et quatre boules vertes numérotées 2-2-2-1.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

Soit les évènements suivants :

A : Les trois boules tirées portent le même numéro

B : Obtenir trois boules deux à deux de couleurs différentes

1/ Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

2/ a/ Montrer que $P(A\cap B)=\dfrac{1}{21}$.

b/ Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3/ Calculer la probabilité d'obtenir trois boules deux à deux de couleurs différentes sachant qu'ils portent le même numéro.

Problème

A/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln(x)$

1/ Montrer que $g'(x)=\dfrac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

2/ Dresser le tableau de variation de g. (Calcul des limites n'est pas demandé)

3/ En déduire que $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x}\ln x, & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ Montrer que f est continue à droite en 0 (On pourra poser $t=\sqrt{x}$).

2/ Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3/ a/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$ et en déduire la nature du branche parabolique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c/ Etudier la position relative de la droite (Δ) d'équation $y=x$ et la courbe (C_f).

4/ a/ Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Calculer $f'(1)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

6/ Construire, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

7/ a/ Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.

b/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^e \sqrt{x}\ln(x)dx = \frac{2e\sqrt{e}+4}{9}$.

c/ En déduire en cm^2, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

C/ Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1/ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 1$

2/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante (On pourra utiliser la question B/ 3/ c/)

3/ En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Correction

Exercice 1

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6} \end{cases}$

1/ a/ Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-1 < u_n < 3$.

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \dfrac{2}{3}$ donc $-1 < u_0 < 3$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $-1 < u_n < 3$ et montrons que $-1 < u_{n+1} < 3$

Nous montrerons que $u_{n+1} - (-1) > 0$ et $u_{n+1} - 3 < 0$

Nous avons : $u_{n+1} - (-1) = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6} + 1 = \dfrac{7u_n + 7}{u_n + 6} = \dfrac{7(u_n + 1)}{u_n + 6}$.

Comme $u_n > -1$, alors $u_n + 1 > 0$ et $u_n + 6 > 0$ donc $\dfrac{7(u_n + 1)}{u_n + 6} > 0$ d'où : $u_{n+1} + 1 > 0$

D'autre part : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6} - 3 = \dfrac{5u_n - 15}{u_n + 6} = \dfrac{5(u_n - 3)}{u_n + 6}$.

Comme $u_n - 3 < 0$ et $u_n + 6 > 0$ alors $\dfrac{5(u_n - 3)}{u_n + 6} < 0$ d'où : $u_{n+1} - 3 < 0$

• Conclusion : D'après le principe de récurrence on déduit que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-1 < u_n < 3$.

b/ Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 6}$ et déduisons que la suite (u_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'une part nous avons : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6} - u_n = \dfrac{8u_n + 3 - u_n(u_n + 6)}{u_n + 6} = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{u_n + 6}$.

D'autre part $\dfrac{-(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 6} = \dfrac{-(u_n^2 - 3u_n + u_n - 3)}{u_n + 6} = \dfrac{-(u_n^2 - 2u_n - 3)}{u_n + 6} = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{u_n + 6}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 6}$

Comme $-1 < u_n < 3$, alors $\dfrac{-(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 6} \geq 0$ d'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

2/ On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

a/ Montrons que la suite (v_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{5(u_n - 3)}{u_n + 6}}{\dfrac{7(u_n + 1)}{u_n + 6}} = \dfrac{5(u_n - 3)}{7(u_n + 1)} = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1} = \dfrac{5}{7} \times v_n$.

Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{5}{7}$

b/ Exprimons v_n et u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Puisque la suite (v_n) est géométrique, alors : $v_n = v_0 \times q^n$.

Avec $v_0 = \dfrac{u_0 - 3}{u_0 + 1} = \dfrac{\frac{2}{3} - 3}{\frac{2}{3} + 1} = -\dfrac{7}{5}$ et $q = \dfrac{5}{7}$

Donc : $v_n = -\dfrac{7}{5} \times \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$. D'où $v_n = -\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n-1}$.

- Ecrivons u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Ecrivons premièrement u_n en fonction de v_n .

On a : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1} \Leftrightarrow v_n\left(u_n + 1\right) = u_n - 3$

$\Leftrightarrow v_n \times u_n - u_n = -v_n - 3$

$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 3$.

D'où $u_n = \dfrac{-v_n - 3}{v_n - 1}$.

Et puisque $v_n = -\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n-1}$, alors $u_n = \dfrac{\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} - 3}{-\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} - 1}$.

3/ Déterminons la limite de la suite (u_n).

Nous avons : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} - 3}{-\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} - 1} = \dfrac{0 - 3}{0 - 1}$ (car $-1 < \dfrac{5}{7} < 1$). D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Exercice 2

A/ Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 = -4 = (2i)^2$.

Les solutions de cette équation sont $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$

B/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

1/ a/ Ecrivons sous la forme trigonométrique les nombres complexes a et b .

*/ Nous avons le module de a est $|a| = \left|\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

Donc $a = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

D'où $a = 2\left(cos(\dfrac{\pi}{6}) + i.sin(\dfrac{\pi}{6})\right)$

*/ Nous avons le module de b est $|b| = \left|\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{3} + 1\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{3} + 1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)$

Donc $b=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}+1)=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

D'où $b=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(cos(\frac{\pi}{4})+i.sin(\frac{\pi}{4})\right)$

b/ Montrons que $a^{12}+b^{12}=2^{12}\left(1-(2+\sqrt{3})^{6}\right)$

*/ Nous avons $a=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc :

$$\begin{aligned}
a^{12}+b^{12} &= \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12}+\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} \\
&= 2^{12}e^{i2\pi}+\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^{12}e^{i3\pi} \\
&= 2^{12}\times 1+\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^{12}\times(-1) \\
&= 2^{12}-2^{6}\times\left((\sqrt{3}+1)^{2}\right)^{6} \\
&= 2^{12}-2^{6}\times(4+2\sqrt{3})^{6} \\
&= 2^{12}-2^{6}\times 2^{6}\times(2+\sqrt{3})^{6} \\
&= 2^{12}\left(1-(2+\sqrt{3})^{6}\right)
\end{aligned}$$

2/ Soit C un point du plan complexe tels que $OA=OC$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

a/ Montrons que $|c|=2$ et $\arg(c)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ (c est l'affixe du point C).

*/ Nous avons $OA=OC$

Donc $|a-0|=|c-0|$ c'est à dire $|c|=|a|$

D'où $|c|=2$

*/ Nous avons $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Donc $\arg(\frac{c-0}{a-0})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ c'est à dire $\arg(\frac{c}{a})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

D'où $\arg(c)-\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou encore $\arg(c)\equiv\frac{\pi}{6}+\arg(a)[2\pi]$

Or $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ (car $a=2\left(cos(\frac{\pi}{6})+i.sin(\frac{\pi}{6})\right)$)

Alors $\arg(c)\equiv\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Finalement $\arg(c)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

b/ Déduisons que $c=1+\sqrt{3}i$ et vérifions que $b=a+c$.

*/ On sait que $c=|c|\left(cos(\arg(c))+sin(\arg(c))\right)$

Donc $c=2\left(cos(\frac{\pi}{3})+isin(\frac{\pi}{3})\right)$

C'est à dire $c=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où $c=1+\sqrt{3}i$

*/ Nous avons $a+c=\sqrt{3}+i+1+\sqrt{3}i$

$$=\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}+1)i$$

$$=b$$

Donc $b=a+c$

c/ Montrons que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

*/ Nous avons $OA=OC$ donc il suffit de montrer que $OABC$ est un parallélogramme.

C'est-à-dire de montrer que $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$

Or $b=a+c$ c'est à dire $a-0=b-c$

Alors $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$

Donc le quadrilatère $OABC$ est un losange.

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(0;0;-1)$, $B\left(-1;1;\frac{1}{2}\right)$, $C(0;1;0)$ et la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$.

1/ a/ Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

On détermine d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Nous avons : $\overrightarrow{AB}(-1;1;\frac{3}{2})$ et $\overrightarrow{AC}(0;1;1)$.

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{3}{2} & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ \frac{3}{2} & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

C'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

b/ Montrons que l'équation cartésienne du plan (ABC) est $x-2y+2z+2=0$

On sait que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Or $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(-\frac{1}{2};1;-1\right)$, alors une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme : $-\frac{1}{2}x+y-z+d=0$

Il reste à trouver d

Nous avons $A(0;0;-1)\in(ABC)$ donc $-\frac{1}{2}\times0+0-(-1)+d=0$ ainsi $d=-1$

D'où l'équation du plan (ABC) est $-\frac{1}{2}x+y-z-1=0$ ou encore $x-2y+2z+2=0$

2/ Montrons que (S) est de centre $\Omega(1;-2;-2)$ et de rayon $R=2$.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace, nous avons :

$$\begin{aligned}M(x;y;z)\in(S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0\\ &\Leftrightarrow (x^2-2x)+y^2+4y+z^2+4z+5=0\\ &\Leftrightarrow (x^2-2x+1)-1+(y^2+4y+4)-4+(z^2+4z+4)-4+5=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+2)\ \ -4+5=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=2^2\end{aligned}$$

Donc la sphère (S) est de centre $\Omega(1;-2;-2)$ et de rayon $R=2$.

3/ Montrons que le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un cercle (C) de rayon $r=\sqrt{3}$.

*/ On compare la distance $d\left(\Omega;\left(ABC\right)\right)$ avec le rayon R de la sphère.

On sait que $d\left(\Omega;\left(ABC\right)\right)=\dfrac{\left|x_\Omega-2y_\Omega+2z_\Omega+2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$

C'est-à-dire $d\left(\Omega;\left(ABC\right)\right)=\dfrac{\left|1-2\times(-2)+2\times(-2)+2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{3}{3}=1$

*/ Puisque $d=d\left(\Omega;\left(ABC\right)\right)<R$ alors le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un cercle (C) de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

4/ Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a/ Montrons que $\begin{cases}x=1+t\\y=-2-2t\\z=-2+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (D)

*/ Pour déterminer une représentation paramétrique d'une droite, on doit déterminer un point et un vecteur directeur de cette droite.

*/ D'une part, la droite (D) passe par le point $\Omega\left(1;-2;-2\right)$.

D'une autre part, on a (D) est perpendiculaire au plan (ABC) et le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(-\dfrac{1}{2};1;-1\right)$ (ou encore le vecteur $-2\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(1;-2;2\right)$) est normal au plan (ABC)

Donc le vecteur $-2\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(1;-2;2\right)$ est un vecteur directeur de la droite (D)

Par suite $\begin{cases}x=1+t\\y=-2-2t\\z=-2+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D)

b/ Montrons que le centre du cercle (C) est le point $H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{8}{3}\right)$

Le point H est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC), c'est le point d'intersection de la droite (D) et le plan (ABC)

Les coordonnées de H sont donc la solution du système :

$$\begin{cases}x=1+t\\y=-2-2t\\z=-2+2t\\x-2y+2z+2=0\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

On résout ce système en substituant les trois premières équations dans la dernière.

On obtient $(1+t)-2(-2-2t)+2(-2+2t)+2=0$ ou encore $3+9t=0$ donc $t=-\dfrac{1}{3}$

Ensuite, on remplace la valeur du paramètre t par $-\dfrac{1}{3}$ dans la représentation paramétrique de (D), on trouve $H\left(1-\dfrac{1}{3};-2-2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right);-2+2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$

Finalement $H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{8}{3}\right)$

5/ Soit $K\left(a;b;-1\right)$ un point de la sphère (S) tel que a et b des nombres réels. On considère le plan (P) d'équation cartésienne $(a-1)x+(b+2)y+z-a+2b+3=0$

a/ Montrons que K appartient au plan (P).

Nous montrerons que $(a-1)x_K+(b+2)y_K+z_K-a+2b+3=0$

D'une part, nous avons $(a-1)x_K+(b+2)y_K+z_K-a+2b+3=(a-1)a+(b+2)b-1-a+2b+3$

$$=a^2-a+b^2+2b-1-a+2b+3$$
$$=a^2+b^2-2a+4b+2$$

D'autre part, nous avons $K\left(a;b;-1\right)\in(S)$ c'est-à-dire ${x_K}^2+{y_K}^2+{z_K}^2-2x_K+4y_K+4z_K+5=0$ ou encore

$a^2+b^2+(-1)^2-2a+4b+4(-1)+5=0$

Par suite $a^2+b^2-2a+4b+2=0$ ainsi $(a-1)x_K+(b+2)y_K+z_K-a+2b+3=0$

D'où $K\in(P)$

b/ Montrons que le plan (P) est tangente à la sphère (S) au point K.

C'est-à-dire montrons que $d\left(\Omega;(P)\right)=R$ et que K est le projeté orthogonal de Ω sur (P)

*/ On sait que $d\left(\Omega;(P)\right)=\dfrac{\left|(a-1)x_\Omega+(b+2)y_\Omega+z_\Omega-a+2b+3\right|}{\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2+1^2}}$

$$=\frac{\left|(a-1)\times1+(b+2)\times(-2)+(-2)-a+2b+3\right|}{\sqrt{a^2+b^2-2a+4b+6}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\left(a^2+b^2-2a+4b+2\right)+4}}=\frac{4}{\sqrt{0+4}}=2=R$$

Puisque $d\left(\Omega;(P)\right)=R$ alors le plan (P) est tangente à (S) au point M le projeté orthogonal de Ω sur (P)

*/ Montrons que $M=K$

On pose $M(x;y;z)$

Nous avons M est un point d'intersection de la sphère (S) et le plan (P)

De plus on a $\vec{n}(a-1;b+2;1)$ est un vecteur normal au plan (P)

Donc les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}(x-1;y+2;z+2)$ et $\vec{n}(a-1;b+2;1)$ sont colinéaires et $M\in(P)$

Donc il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M}=k\vec{n}$ et $M\in(P)$

D'où $\begin{cases}x-1=k(a-1)\\y+2=k(b+2)\\z+2=k\\(a-1)x+(b+2)y+z-a+2b+3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=k(a-1)+1\\y=k(b+2)-2\\z=k-2\\(a-1)\left(k(a-1)+1\right)+(b+2)\left(k(b+2)-2\right)+\left(k-2\right)-a+2b+3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow k\begin{cases}x=k(a-1)+1\\y=k(b+2)-2\\z=k-2\\k\left((a-1)^2+(b+2)^2\right)-4+k=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=k(a-1)+1\\y=k(b+2)-2\\z=k-2\\k\left(\left(a^2+b^2-2a+4b+2\right)+3\right)-4+k=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k(a-1)+1 \\ y = k(b+2)-2 \\ z = k-2 \\ k(0+3)-4+k = 0 \end{cases}$$

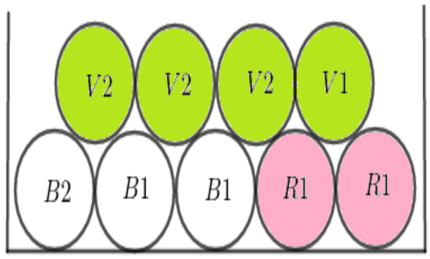
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ x = (a-1)+1 = a \\ y = (b+2)-2 = b \\ z = 1-2 = -1 \end{cases}$$

Donc $M(a;b;-1)$ or $K(a;b;-1)$

Alors $M = K$

*/ Finalement le plan (P) est tangente à la sphère (S) au point K.

Exercice 4



On tire simultanément trois boules de l'urne.

Soit les évènements suivants :

A : Les trois boules tirées portent le même numéro

B : Obtenir trois boules deux à deux de couleurs différentes

1/ Calculons $P(A)$ et $P(B)$.

L'éventualité Ω est une combinaison de 3 éléments parmi 9.

Donc $Card(\Omega) = C_9^3 = 84$

L'évènement A est réalisé si on obtient des tirages de la forme : $\{1,1,1\}$ ou $\{2;2;2\}$

Donc $Card(A) = C_5^3 + C_4^2 = 12$

D'où $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{12}{84} = \dfrac{1}{7}$

L'évènement B est réalisé si on obtient des tirages de la forme : $\{B,R,V\}$

Donc $Card(B) = C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1 = 24$

D'où $P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{24}{84} = \dfrac{2}{7}$

2/ a/ Montrons que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{21}$.

L'évènement $A \cap B$ est réalisé si on obtient le tirage de la forme : $\{B1, R1, V1\}$

Donc $Card(A \cap B) = C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 4$

D'où $P(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{4}{84} = \dfrac{1}{21}$

b/ Déterminons si les évènements A et B sont indépendants

Nous avons $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{7} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{2}{49}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{21}$

Puisque $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$

Alors les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3/ Calculons la probabilité d'obtenir trois boules deux à deux de couleurs différentes sachant qu'ils portent le même numéro.

C'est-à-dire calculons $P_A(B)$

On sait que $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Donc $P_A(B)=\dfrac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{7}}=\dfrac{1}{3}$

Problème

A/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln(x)$

1/ Montrons que $g'(x)=\dfrac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Soit $x\in]0;+\infty[$

Nous avons : $g'(x)=(2\sqrt{x}-2-\ln(x))'=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-0-\dfrac{1}{x}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=\frac{1}{x}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$$

2/ Dressons le tableau de variation de g .

Nous avons $g'(x)=\dfrac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $x-1$ sur $]0;+\infty[$.

Par conséquent :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

3/ Déduisons que $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

D'après le tableau de variation de g on déduit que $g(x)\geq g(1)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Or $g(1)=2\sqrt{1}-2-\ln(1)=2-2-0=0$ alors $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x}\ln x, & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ Montrons que f est continue à droite en 0

Nous avons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\sqrt{x}\ln x\right)$

$$=\lim_{t\to 0^+}\left(t^2-t\ln t^2\right) \quad (\text{avec } t=\sqrt{x}\,).$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(t^2 - 2t\ln t\right)$$

Puisque $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ et $\lim_{t\to 0^+} t^2 = 0$ alors $\lim_{t\to 0^+}\left(t^2 - 2t\ln t\right) = 0$

Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

D'où f est continue à droite en 0.

2/ Montrons que $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interprétons géométriquement le résultat obtenu.

Nous avons $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}\ln x}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x}\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(1 - \frac{\ln t^2}{t}\right) \text{(avec } t = \sqrt{x}\text{).}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(1 - \frac{2\ln t}{t}\right)$$

Puisque $\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{t} = -\infty$ alors $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = +\infty$

<u>Interprétation géométrique :</u>

Nous avons $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ ce qui signifie que la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigé vers le haut au point d'abscisse 0.

3/ a/ Montrons que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Nous avons $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x - \sqrt{x}\ln x\right)$

$$= \lim_{t\to +\infty}\left(t^2 - t\ln t^2\right) \text{(avec } t = \sqrt{x}\text{).}$$

$$= \lim_{t\to +\infty}\left(t^2 - 2t\ln t\right)$$

$$= \lim_{t\to +\infty} t^2\left(1 - 2\frac{\ln t}{t}\right)$$

Puisque $\lim_{t\to +\infty}\frac{\ln t}{t} = 0$ et $\lim_{t\to +\infty} t^2 = +\infty$ alors $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b/ Montrons que $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) - x = -\infty$ et déduisons la nature du branche parabolique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

*/ Nous avons $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x}\ln x}{x}\right)$

$$= \lim_{t\to +\infty}\left(\frac{t^2 - t\ln t^2}{t^2}\right) \text{(avec } t = \sqrt{x}\text{).}$$

$$= \lim_{t\to +\infty}\left(\frac{t^2 - 2t\ln t}{t^2}\right)$$

$$= \lim_{t\to +\infty}\left(1 - \frac{2\ln t}{t}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

*/ Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\ln x\right)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x}\ln x$

$$=\lim_{t\to+\infty}-t\ln t^2 \text{ (avec } t=\sqrt{x}\text{).}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}-2t\ln t$$

Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln t=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$

*/ Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$ donc (C_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

c/ Etudions la position relative de la droite (Δ) d'équation $y=x$ et la courbe (C_f).

Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$

Nous avons : $f(x)-x=\left(x-\sqrt{x}\ln x\right)-x=-\sqrt{x}\ln x$

Donc :

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$-\sqrt{x}$		$-$		$-$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

Donc :

Sur l'intervalle $[0;1]$ la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (Δ)

Sur l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$ la courbe (C_f) est en-dessous de la droite (Δ)

4/ a/ Montrons que $f'(x)=\frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$

Nous avons : $f'(x)=\left(x-\sqrt{x}\ln x\right)'$

$$=1-\left((\sqrt{x})'\ln x+\sqrt{x}(\ln x)'\right)$$

$$=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x-\sqrt{x}\times\frac{1}{x}$$

$$=1-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-\ln x-2}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

Donc $f'(x)=\frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

b/ Dressons le tableau de variation de f.

Nous avons $f'(x)=\frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

Puisque $\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$ alors le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$

Donc d'après la question A/ 3/ :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$			$+\infty$

c/ Calculons $f'(1)$ et interprétons géométriquement le résultat obtenu.

Nous avons $f'(1) = \dfrac{g(1)}{2\sqrt{1}} = \dfrac{0}{2} = 0$

Interprétation géométrique :

Nous avons $f'(1) = 0$ alors la droite tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1 est horizontale (parallèle à l'axe des abscisse).

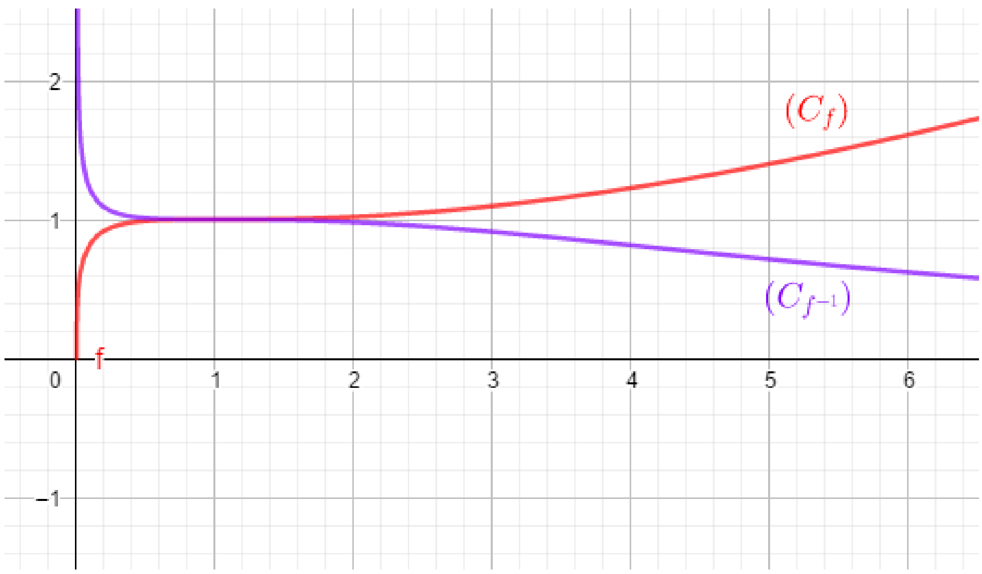
5/ Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}

On a la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle

$J = f(]0;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x);\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]0;+\infty[$

6/ Construisons, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.



7/ a/ Vérifions que la fonction $H : x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.

La fonction H tel que $H(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$, est dérivable sur $]0;+\infty[$ (comme produit de fonctions dérivables) et pour tout $x \in]0;+\infty[$ nous avons :

$$H'(x) = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' = \frac{2}{3}\left(x\sqrt{x}\right)' = \frac{2}{3}\left(1\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right) = \sqrt{x} = h(x).$$

Donc H est une primitive de h sur $]0;+\infty[$

b/ Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\ln(x)dx = \frac{2e\sqrt{e}+4}{9}$.

Nous avons $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\ln(x)dx = \int_1^e h(x)\ln(x)dx = \int_1^e H'(x)\ln(x)dx$

Donc $\int_1^e \sqrt{x}\ln(x)dx = [H(x)\ln(x)]_1^e - \int_1^e H(x)(\ln(x))'dx$

C'est-à-dire : $\int_1^e \sqrt{x}\ln(x)dx = \left[\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\times\frac{1}{x}dx$

$$= \frac{2}{3}e\sqrt{e} - \frac{2}{3}\int_1^e \sqrt{x}dx$$

$$= \frac{2}{3}e\sqrt{e} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^e$$

$$= \frac{2}{3}e\sqrt{e} - \frac{4}{9}\left(e\sqrt{e}-1\right)$$

$$= \frac{6e\sqrt{e}-4\left(e\sqrt{e}-1\right)}{9}$$

$$= \frac{2e\sqrt{e}+4}{9}$$

c/ Déduisons en cm^2, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$et $x = e$.

On sait que l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$et $x = e$ est : $\int_1^e |f(x)|dx \times \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ -

Nous avons $\int_1^e |f(x)|dx = \int_1^e \left|x-\sqrt{x}\ln(x)\right|dx$

$$= \int_1^e \left(x-\sqrt{x}\ln(x)\right)dx \qquad (\text{car } x-\sqrt{x}\ln(x)\geq 0 \text{ pour } x\in[1;e])$$

$$= \int_1^e xdx - \int_1^e \sqrt{x}\ln(x)dx$$

$$= [x]_1^e - \int_1^e \sqrt{x}\ln(x)dx$$

$$= (e-1) - \left(\frac{2e\sqrt{e}+4}{9}\right)$$

$$= \frac{9e-2e\sqrt{e}-13}{9}$$

Ainsi l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$ est :

$$A = \left(\frac{9e-2e\sqrt{e}-13}{9}\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

C/ Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1/ Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ u_n > 1$

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \frac{3}{2} = 1.5$ donc $u_0 > 1$
- Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $u_n > 1$et montrons que $u_{n+1} > 1$

Puisque f est croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ alors $f(u_n) > f(1)$

Or : $f(u_n) = u_{n+1}$et $f(1) = 1-\sqrt{1}\ln 1 = 1$

Donc $u_{n+1} > 1$

• Conclusion : D'après le principe de récurrence on déduit que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 1$.

2/ Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$,

D'après la question B/ 3/ c/ on a $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1;+\infty[$

Nous avons $u_n \in [1;+\infty[$ donc en particulier $f(u_n) \leq u_n$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante

3/ Déduisons que la suite (u_n) est convergente puis déterminons sa limite.

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 1) alors elle est convergente et sa limite l vérifie $f(l) = l$ et $l \in [1;+\infty[$.

On a : $f(l) = l \Leftrightarrow l - \sqrt{l}\ln(l) = l \quad \text{et} \quad l > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{l}\ln(l) = 0 \quad \text{et} \quad l > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(l = 0 \ \ ou \ \ \ln(l) = 0\right) \quad \text{et} \quad l > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(l = 0 \ \ ou \ \ l = 1\right) \quad \text{et} \quad l > 0$$

$$\Leftrightarrow l = 1$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 1$.

Examen blanc

Sujet N ° 3

Matière : Mathématiques

Classe : 2 Bac SVT&SPF

Année scolaire : 2024/2025

Durée : 3 heures

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 4	Géométrie dans l'espace	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n}$.

1 /a/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 3$.

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n}$.

c/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2 /a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{1}{3}(u_n - 3)$.

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - 3 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

c/ Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3 / On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}$.

a/ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b/ Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c/ Retrouver la valeur de la limite de (u_n) .

Exercice 2

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 4z + 13 = 0$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 6 + 2i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 5 - 2i$.

Soit z' l'affixe du point M' l'image du point $M(z)$ par la rotation R de centre $\Omega(1-i)$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

a/ Montrer que $z' = -iz + 2$.

b/ Vérifier que le point C est l'image du point B par la rotation R .

c/ Montrer que $\dfrac{c - a}{b - a} = i$

d/ En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .

Exercice 3

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : trois boules blanches numérotées 2-1-0, deux boules rouge numérotées 2-1.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Soit les évènements suivants :

A : les deux boules tirées portent le numéro 1

B : Obtenir une boule blanche dans le premier tirage

1/ Montrer que $P(A) = \dfrac{1}{10}$.

2/ Calculer $P(B)$ et montrer que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$.

3/ Les évènements A et B sont-ils indépendants ? justifier la réponse.

4/ Soit X la variable aléatoire qui égale le produit des numéros tirées.

Préciser la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$.

Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(-1;1;1)$, $B(7;-5;5)$ et le plan (Q) d'équation $2x-3y+4z+5=0$

Soit (S) la sphère du diamètre $[AB]$

1/ Montrer que (S) est de centre $\Omega(3;-2;3)$ et de rayon $R=\sqrt{29}$.

2/ En déduire que l'équation cartésienne de (S) est $x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z-7=0$

3/ Montrer que l'équation cartésienne du plan (P) tangente à (S) au point A est $4x-3y+2z+5=0$

4/ Montrer que le plan (Q) est tangente à (S) en un point C puis déterminer les coordonnées de C.

Problème

A/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-x+x\ln(x)$

1/ Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ est croissante sur $[1;+\infty[$.

2/ Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $[0;e[\cup]e;+\infty[$ par :

$f(0)=0$ et $f(x)=x+\frac{1}{1-ln(x)}$, si $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

b/ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c/ Etudier la position relative de (Δ) et (C_f).

2/ a/ Montrer que f est continue à droite en 0.

b/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3/ a/ Montrer que $f'(x)=1+\dfrac{1}{x(1-\ln(x))^2}$ pour tout $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ On donne :

x	3.4	3.5	3.6	3.7
$f(x)$	-1.06	-0.45	0.04	0.45

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]e;+\infty[$ et que $3.5<\alpha<3.6$.

4/ a/ Montrer que l'équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse 1 est $y=2x$

b/ Montrer que $f(x)\geq 2x$ pour tout $x\in]0;e[$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5/ Construire, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) et la droite (D). (On admet que le point $I(e^{-1};f(e^{-1}))$ est un point d'inflexion de (C_f) et $e\simeq 2.7$, $e^{-1}\simeq 0.4$)

6/ a/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,ln(x)dx=\frac{ln(2)}{8}-\frac{3}{16}$.

b/ Montrer que $2x\leq f(x)\leq x+1-x\ln(x)$ pour tout $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

c/ Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$.

Montrer que $\frac{3}{4}\leq A\leq\frac{17}{16}-\frac{ln(2)}{8}$.

Correction

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n}$.

1 /a/ Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 3$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 4$ donc $u_0 > 3$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 3$ et montrons que $u_{n+1} > 3$.

On a : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4u_n - 3}{u_n} - 3 = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.

Comme $u_n > 3$, alors $\dfrac{u_n - 3}{u_n} > 0$ d'où : $u_{n+1} > 3$.

- Conclusion : D'après le principe de récurrence on déduit que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 3$.

b/ Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n - 3}{u_n} - u_n = \dfrac{4u_n - 3 - u_n^2}{u_n} = \dfrac{-u_n^2 + 4u_n - 3}{u_n}$

Et puisque $\dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n} = \dfrac{-u_n^2 + 3u_n + u_n - 3}{u_n} = \dfrac{-u_n^2 + 4u_n - 3}{u_n}$

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n}$.

c/ Montrons que la suite (u_n) est décroissante et déduisons qu'elle est convergente.

*/ Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminons le signe de $u_{n+1} - u_n$

Nous avons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n}$.

Comme $u_n > 3$, alors : $u_n > 0$, $u_n - 3 > 0$ et $u_n - 1 > 2 > 0$.

Donc $\dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n} < 0$. C'est à dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

*/ Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 3) alors elle est convergente.

2 /a/ Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{1}{3}(u_n - 3)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$ et $u_n > 3$.

Donc $\dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{3}$ et $u_n - 3 > 0$.

Donc $\dfrac{1}{u_n} \times (u_n - 3) \leq \dfrac{1}{3} \times (u_n - 3)$.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{1}{3}(u_n - 3)$.

b/ Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - 3 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

• Initialisation : Pour $n=0$, on a : $u_0-3=2-3=1$ donc $u_0-3\le\left(\frac{1}{3}\right)^0$.

• Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $u_n-3\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1}-3\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

On a : $u_n-3\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$, donc $\frac{1}{3}(u_n-3)\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

Et puisque $u_{n+1}-3\le\frac{1}{3}\left(u_n-3\right)$, alors $u_{n+1}-3\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

• Conclusion : D'après le principe de récurrence on déduit que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n-3\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$

c/ Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

On a $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n-3\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Ou encore $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_n-3|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ car ($(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n-3>0$).

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ (car $-1<\frac{1}{3}<1$).

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

3 /On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\frac{u_n-3}{u_n-1}$.

a/ Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}-1}=\frac{\frac{u_n-3}{u_n}}{\frac{4u_n-3}{u_n}-1}=\frac{\frac{u_n-3}{u_n}}{\frac{3u_n-3}{u_n}}=\frac{u_n-3}{3u_n-3}=\frac{u_n-3}{3(u_n-1)}=\frac{1}{3}v_n$.

Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme : $v_0=\frac{u_0-3}{u_0-1}=\frac{4-3}{4-1}=\frac{1}{3}$.

b/ Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

• Puisque la suite (v_n) est géométrique, alors : $v_n=v_0\times q^n$.

donc : $v_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ .D'où $v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

• Ecrivons u_n en fonction de n.

Ecrivons premièrement u_n en fonction de v_n .

On a : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n-1}\Leftrightarrow v_n\left(u_n-1\right)=u_n-3$

$$\Leftrightarrow v_n\times u_n-u_n=v_n-3$$
$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=v_n-3\ .$$

D'où $u_n=\frac{v_n-3}{v_n-1}$.

Et puisque $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$, alors $u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 3}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}$.

c/ Retrouvons la valeur de la limite de (u_n).

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 3}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1} = \dfrac{0-3}{0-1}$ (car $-1 < \frac{1}{3} < 1$).

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Exercice 2

1/ Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 4z + 13 = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = -36 = (6i)^2$.

Les solutions de cette équation sont $z_1 = \dfrac{4-6i}{2} = 2 - 3i$ et $z_2 = \dfrac{4+6i}{2} = 2 + 3i$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 6 + 2i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 5 - 2i$.

Soit z' l'affixe du point M' l'image du point $M(z)$ par la rotation R de centre $\Omega(1-i)$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

a/ Montrons que $z' = -iz + 2$.

On sait que $z' - z_\Omega = \left(z - z_\Omega\right) e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

C'est-à-dire $z' - (1-i) = \left(z - 1 + i\right) \times (-i)$

Ou encore $z' - 1 + i = -iz + i + 1$

D'où $z' = -iz + 2$

b/ Vérifions que le point C est l'image du point B par la rotation R .

Il suffit de montrer que $c = -ib + 2$

Nous avons : $\begin{aligned}[t] -ib + 2 &= -i\left(2 + 3i\right) + 2 \\ &= -2i + 3 + 2 \\ &= -2i + 5 \\ &= c \end{aligned}$

Donc C est l'image du point B par la rotation R .

c/ Montrons que $\dfrac{c-a}{b-a} = i$

Nous avons : $\begin{aligned}[t] \dfrac{c-a}{b-a} &= \dfrac{5 - 2i - (6+2i)}{2 + 3i - (6+2i)} \\ &= \dfrac{-1-4i}{i-4} \\ &= \dfrac{i(i-4)}{i-4} \\ &= i \end{aligned}$

d/ Déduisons que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .

Nous avons : $\dfrac{c-a}{b-a} = i$

Donc $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(i)[2\pi]$ et $\dfrac{|c-a|}{|b-a|} = |i|$

C'est-à-dire $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\dfrac{AC}{AB} = 1$

Donc $(AC) \perp (AB)$ et $AC = AB$

D'où le triangle ABD est rectangle et isocèle en A.

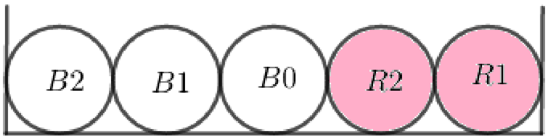
Exercice 3

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Soit les évènements suivants :

A : les deux boules tirées portent le numéro 1

B : Obtenir une boule blanche dans le premier tirage



1/ Montrons que $P(A) = \dfrac{1}{10}$.

L'éventualité Ω est un arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 5.

Donc $Card(\Omega) = A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

L'évènement A est réalisé si on obtient le tirage de la forme : $\{1;1\}$

Donc $Card(A) = A_2^2 = 2$

D'où $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$

2/ Calculons $P(B)$ et montrons que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$.

*/ L'évènement B est réalisé si on obtient les tirages de la formes : $\{B;B\}$ ou $\{B;R\}$

Donc $Card(B) = A_3^2 + A_3^1 \times A_2^1 = 12$

D'où $P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

*/ L'évènement $A \cap B$ est réalisé si on obtient le tirage : $\{B1, R1\}$

Donc $Card(A \cap B) = A_1^1 \times A_1^1 = 1$

D'où $P(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1}{20}$

3/ Déterminons si les évènements A et B sont indépendants

Nous avons $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{50}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$

Puisque $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$

Alors les évènements A et B ne sont pas indépendants.

4/ Soit X la variable aléatoire qui égale le produit des numéros tirées.

Précisons la loi de probabilité de X et calculons $E(X)$.

*/ On a 4 possibilités pour X :

$X = 0$ si une boule tirée porte le numéro 0

$X = 1$ si les deux boules tirées portent le numéro 1

$X = 2$ si une boule tirée porte le numéro 2 et l'autre porte le numéro 1

$X = 4$ si les deux boules tirées portent le numéro 2

*/ On résume les tirages possibles pour obtenir X dans le tableau suivant :

X	0	1	2	4
les tirages possibles pour obtenir X	$\{0;1\}$ ou $\{0;2\}$	$\{1;1\}$	$\{2;1\}$	$\{2;2\}$

*/ Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X

$$P(X=0)=\frac{2A_1^1\times A_2^1+2A_1^1\times A_2^1}{A_5^2}=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{A_2^2}{A_5^2}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{2A_2^1\times A_2^1}{A_5^2}=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$$

$$P(X=4)=\frac{A_2^2}{A_5^2}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

*/ Une autre méthode pour calculer $P(X=4)$

On sait que $P(X=4)+P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)=1$

Donc $P(X=4)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$

C'est-à-dire $P(X=4)=1-\frac{4}{10}-\frac{1}{10}-\frac{4}{10}$

Ce qui donne $P(X=4)=\frac{1}{10}$

*/ On résume la loi de probabilité de la variable X dans le tableau suivant :

$X=k$	0	1	2	4
$P(X=k)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

*/ Calculons l'espérance $E(X)$

On sait que $E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+4\times P(X=4)$

$$=0+\frac{1}{10}+\frac{8}{10}+\frac{4}{10}$$

$$=\frac{13}{10}$$

Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(-1;1;1)$, $B(7;-5;5)$ et le plan (Q) d'équation $2x-3y+4z+5=0$

Soit (S) la sphère du diamètre $[AB]$

1/ Montrons que (S) est de centre $\Omega(3;-2;3)$ et de rayon $R=\sqrt{29}$.

La sphère (S) du diamètre $[AB]$ donc :

Son centre est $\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ le milieu de

Son rayon est $R=\frac{AB}{2}$ le milieu de $[AB]$

Nous avons $\Omega\left(\frac{-1+7}{2};\frac{1-5}{2};\frac{1+5}{2}\right)$ et $R=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}{2}$

Donc $\Omega(3;-2;3)$ et $R=\dfrac{\sqrt{(7+1)^2+(-5-1)^2+(5-1)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{116}}{2}=\sqrt{29}$

2/ Déduisons que l'équation cartésienne de (S) est $x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z-7=0$

La sphère (S) est de centre $\Omega(3;-2;3)$ et de rayon $R=\sqrt{29}$ donc son équation cartésienne est :

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{29}^2$

Ou encore : $x^2-6x+9+y^2+4y+4+z^2-6z+9=29$

Finalement : $x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z-7=0$

3/ Montrons que l'équation cartésienne du plan (P) tangente à (S) au point A est $4x-3y+2z+5=0$

L'équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous la forme $ax+by+cz+d=0$

Puisque le plan (P) est tangente à (S) au point A alors le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ est un vecteur normal au plan (P)

Nous avons $\overrightarrow{A\Omega}(4;-3;2)$

Donc l'équation cartésienne du plan (P) s'écrit $4x-3y+2z+d=0$

Il reste à trouver d, on a $A\in(4x-3y+2z+d=0)$ donc $4\times(-1)-3\times1+2\times1+d=0$

D'où $d=5$ ainsi l'équation du plan (P) est $4x-3y+2z+5=0$

4/ Montrons que le plan (Q) est tangente à (S) en un point C puis déterminons les coordonnées de C.

*/ On compare la distance $d(\Omega;(Q))$ avec le rayon $R=\sqrt{29}$ de la sphère.

On sait que $d(\Omega;(Q))=\dfrac{|2x_\Omega-3y_\Omega+4z_\Omega+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}$

C'est-à-dire $d(\Omega;(Q))=\dfrac{|2\times3-3\times(-2)+4\times3+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$

Puisque $d(\Omega;(Q))=R$ alors le plan (Q) est tangente à (S) en un point C

*/ On pose $C(x;y;z)$

Nous avons C est le point d'intersection de la sphère (S) et le plan (Q)

De plus on a $\vec{n}(2;-3;4)$ est un vecteur normal au plan (Q)

Donc les vecteurs $\overrightarrow{\Omega C}(x-3;y+2;z-3)$ et $\vec{n}(2;-3;4)$ sont colinéaires et $C\in(Q)$

Donc il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\Omega C}=k\vec{n}$ et $C\in(Q)$

D'où $\begin{cases}x-3=2k\\ y+2=-3k\\ z-3=4k\\ 2x-3y+4z+5=0\end{cases}$ ou encore $\begin{cases}x=2k+3\\ y=-3k-2\\ z=4k+3\\ 2(2k+3)-3(-3k-2)+4(4k+3)+5=0\end{cases}$

C'est-à-dire $\begin{cases}x=2k+3\\ y=-3k-2\\ z=4k+3\\ 29k+29=0\end{cases}$ d'où $\begin{cases}k=-1\\ x=2k+3=1\\ y=-3k-2=1\\ z=4k+3=-1\end{cases}$

Donc $C(1;1;-1)$

Problème

A/ Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-x+x\ln(x)$

1/ Calculons $g'(x)$ et déduisons que la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ est croissante sur $[1;+\infty[$.

Soit $x \in]0;+\infty[$ on a : $g'(x) = (1 - x + x\ln(x))' = 0 - 1 + (x\ln(x))'$

$$= -1 + (x'\ln(x) + x\ln'(x))$$

$$= -1 + \ln(x) + x \times \frac{1}{x}$$

$$= \ln(x)$$

*/ Soit $x \in]0;+\infty[$

Nous avons : $g'(x) = \ln(x)$

Donc si $x \in]0;1]$ alors $\ln(x) = g'(x) \leq 0$

Et si $x \in [1;+\infty[$ alors $\ln(x) = g'(x) \geq 0$

D'où la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ est croissante sur $[1;+\infty[$.

2/ Calculons $g(1)$ déduisons que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

*/ Nous avons $g(1) = 1 - 1 + 1\ln 1 = 0$

*/ Puisque la fonction g est décroissante sur $]0;1]$ est croissante sur $[1;+\infty[$, alors $g(x) \geq g(1)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Or $g(1) = 0$ alors $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

B/ On considère la fonction numérique f définie sur $[0;e[\cup]e;+\infty[$ par :

$f(0) = 0$ et $f(x) = x + \dfrac{1}{1 - \ln(x)}$, si $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ a/ Calculons $\lim\limits_{x \to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to e^-} f(x)$ puis interprétons géométriquement les résultats obtenus.

*/ Nous avons $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e^+} x + \dfrac{1}{1 - \ln(x)}$

Puisque $\lim\limits_{x \to e^+} 1 - \ln(x) = 0^-$ (car $x > e \Rightarrow 1 - \ln(x) < 0$)

Alors $\lim\limits_{x \to e^+} \dfrac{1}{1 - \ln(x)} = -\infty$

Or $\lim\limits_{x \to e^+} x = e$ donc $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = -\infty$

*/ Nous avons $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e^-} x + \dfrac{1}{1 - \ln(x)}$

Puisque $\lim\limits_{x \to e^-} 1 - \ln(x) = 0^+$ (car $x < e \Rightarrow 1 - \ln(x) > 0$)

Alors $\lim\limits_{x \to e^-} \dfrac{1}{1 - \ln(x)} = +\infty$

Or $\lim\limits_{x \to e^-} x = e$ donc $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = +\infty$

Interprétation géométrique :

La droite d'équation $x = e$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f)

b/ Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Il suffit de montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \dfrac{1}{1 - \ln(x)} \right) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \ln(x)} = 0$ (Car $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln(x) = -\infty$)

D'où la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c/ Etudions la position relative de (Δ) et (C_f).

*/ Soit $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$

Nous avons : $f(x) - x = \left(x + \dfrac{1}{1-\ln(x)}\right) - x = \dfrac{1}{1-\ln(x)}$

*/ Puisque on a :

$$f(x) - x > 0 \Leftrightarrow 1-\ln(x) > 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) < 1$$
$$\Leftrightarrow x < e$$

et $f(x) - x < 0 \Leftrightarrow 1-\ln(x) < 0$

$$\Leftrightarrow \ln(x) > 1$$
$$\Leftrightarrow x > e$$

Alors : (C_f) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]0;e[$,

(C_f) est en dessous de (Δ) sur l'intervalle $]e;+\infty[$

2/ a/ Montrons que f est continue à droite en 0.

Nous avons : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x + \dfrac{1}{1-\ln(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1-\ln(x)} = 0 = f(0)$ (Car $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\ln(x) = +\infty$)

Donc f est continue à droite en 0.

b/ Etudions la dérivabilité de f à droite en 0 et interprétons géométriquement le résultat obtenu.

Nous avons : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x + \frac{1}{1-\ln(x)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \dfrac{1}{x(1-\ln(x))} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \dfrac{1}{x - x\ln(x)}$ Puisque

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} x - x\ln(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0

<u>Interprétation géométrique :</u>

Nous avons $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ ce qui signifie que la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigé vers le haut au point d'abscisse 0.

3/ a/ Montrons que $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x(1-\ln(x))^2}$ pour tout $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$.

*/ Soit $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$

Nous avons : $f'(x) = \left(x + \dfrac{1}{1-\ln(x)}\right)' = 1 - \dfrac{(1-\ln(x))'}{(1-\ln(x))^2} = 1 - \dfrac{0 - \frac{1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = 1 + \dfrac{1}{x(1-\ln(x))^2}$

b/ Dressons le tableau de variation de f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c/ On donne :

x	3.4	3.5	3.6	3.7
$f(x)$	-1.06	-0.45	0.04	0.45

Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]e;+\infty[$ et que $3.5<\alpha<3.6$.

On a la fonction f est continue et strictement croissante sur $]e;+\infty[$

De plus et d'après le tableau précédent on a $f(3.5)\times f(3.6)<0$

Donc d'après T.V.I l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]e;+\infty[$ et que $3.5<\alpha<3.6$.

4/ a/ Montrons que l'équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse 1 est $y=2x$

L'équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse 1 est donnée par : $(D):\ y=f'(1)(x-1)+f(1)$

Or $f(1)=1+\dfrac{1}{1-\ln(1)}=2$ et $f'(1)=1+\dfrac{1}{1(1-\ln(1))^2}=2$

Donc $(D):\ y=2(x-1)+2$ finalement $(D):\ y=2x$

b/ Montrons que $f(x)\geq 2x$ pour tout $x\in]0;e[$ et interprétons géométriquement le résultat obtenu.

*/ Soit $x\in]0;e[$

Nous avons : $f(x)-2x=\left(x+\dfrac{1}{1-\ln(x)}\right)-2x=\dfrac{1}{1-\ln(x)}-x=\dfrac{1-x+x\ln(x)}{1-\ln(x)}=\dfrac{g(x)}{1-\ln(x)}$

*/ Puisque on a $g(x)\geq 0$ (d'après la question A/ 2/)

et $1-\ln(x)>0$ car $x<e$

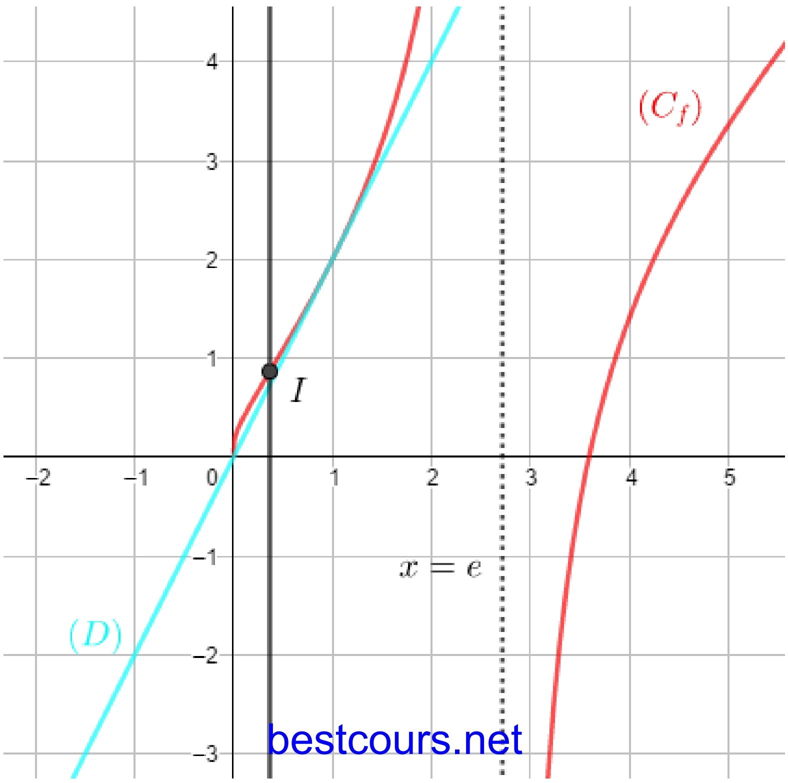
Alors : $f(x)-2x\leq 0$

D'où $f(x)\geq 2x$ pour tout $x\in]0;e[$

Interprétation géométrique :

Nous avons $f(x)\geq 2x$ pour tout $x\in]0;e[$ cela signifie que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]0;e[$

5/ Construisons, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) et la droite (D). (le point $I(e^{-1};f(e^{-1}))$ est un point d'inflexion de (C_f) et $e\simeq 2.7$, $e^{-1}\simeq 0.4$)



6/ a/ Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\ln(x)dx = \frac{\ln(2)}{8} - \frac{3}{16}$.

Nous avons $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\ln(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\frac{x^2}{2})'\ln(x)dx$

Donc $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\frac{x^2}{2})(\ln(x))'dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\frac{x^2}{2})\frac{1}{x}dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} xdx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ln(\frac{1}{2}) + \frac{1}{16}$$

$$= -\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\ln(2) = \frac{\ln(2)}{8} - \frac{3}{16}$$

b/ Montrons que $2x \le f(x) \le x+1-x\ln(x)$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

*/ Nous avons d'après une question précédente $f(x) \ge 2x$ pour tout $x \in]0;e[$

Donc en particulier $f(x) \ge 2x$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

Il reste à montrer que $f(x) \le x+1-x\ln(x)$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

Il suffit de montrer que $f(x) - \left(x+1-x\ln(x)\right) \le 0$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

*/ Soit $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

Nous avons $f(x) - \left(x+1-x\ln(x)\right) = \left(x + \frac{1}{1-\ln(x)}\right) - \left(x+1-x\ln(x)\right) = \frac{1}{1-\ln(x)} - \left(1-x\ln(x)\right)$

$$= \frac{1-\left(1-x\ln(x)\right)\left(1-\ln(x)\right)}{1-\ln(x)}$$

$$= \frac{1-\left(1-\ln(x)-x\ln(x)+x\ln^2(x)\right)}{1-\ln(x)}$$

$$= \frac{\left(\ln(x)+x\ln(x)-x\ln^2(x)\right)}{1-\ln(x)}$$

$$= \frac{(1+x)\ln(x)-x\ln^2(x)}{1-\ln(x)}$$

Puisque $x \leq 1$ alors $\ln(x) \leq 0$ et $1-\ln(x) > 0$

Donc $(1+x)\ln(x) \leq 0$; $-x\ln^2(x) \leq 0$ et $1-\ln(x) > 0$

Par conséquent $(1+x)\ln(x) - x\ln^2(x) \leq 0$ et $1-\ln(x) > 0$

D'où $f(x) - \left(x+1-x\ln(x)\right) \leq 0$ pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$

Ainsi $2x \leq f(x) \leq x+1-x\ln(x)$ pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$

c/ Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

Montrons que $\dfrac{3}{4} \leq A \leq \dfrac{17}{16} - \dfrac{\ln(2)}{8}$.

On sait que l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$ est : $A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x)|\,dx$

Nous avons $0 \leq 2x \leq f(x) \leq x+1-x\ln(x)$ pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$

Donc $A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x\,dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x+1-x\ln(x)\right)dx$

Donc $\left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \leq A \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x+1)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\ln(x)dx$

Donc d'après la question 6/ a $\left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \leq A \leq \left[\dfrac{x^2}{2}+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left(\dfrac{\ln(2)}{8} - \dfrac{3}{16}\right)$

Donc $1-\dfrac{1}{4} \leq A \leq \dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{\ln(2)}{8}-\dfrac{3}{16}\right)$. D'où finalement $\dfrac{3}{4} \leq A \leq \dfrac{17}{16} - \dfrac{\ln(2)}{8}$

Examen blanc

Sujet N ° 4

Matière : Mathématiques

Classe : 2 Bac SVT&SPF

Année scolaire : 2024/2025

Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Géométrie dans l'espace	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $I=[-1;2]$ par : $f(x)=\dfrac{4x+2}{x+3}$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1/ Etudier les variations de la fonction f sur I .

2/ Montrer que $f(I)\subset I$.

3/ Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad -1\leq u_n\leq 2$.

4/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}$.

5/ Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

6/ En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

Un sac contient :

*quatre boules rouges numérotées 2-1-1-1.

* cinq boules vertes numérotées 2-2-1-1-1.

(Les boules sont indiscernables au toucher).

1/ On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de sac.

Soit les évènements suivants :

A * les trois boules tirées portent le même couleur *

B * les trois boules tirées portent le même numéro *

a/ Montrer que $P(A)=\dfrac{1}{6}$, $P(B)=\dfrac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\dfrac{1}{42}$ et $P(A\cup B)=\dfrac{11}{28}$.

b/ Calculer $P_A(B)$.

2/ On tire simultanément trois boules de sac et soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros tirées.

Préciser la loi de probabilité de X puis donner $E(X)$.

Exercice 3

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2-6z+10=0$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2-\sqrt{2}$, $b=3-i$ et $c=\bar{b}$.

a/ Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$.

b/ En déduire que $\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

c/ Montrer que $\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)^{20}=-2^{10}$

3/ Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$

a/Montrer que l'affixe du point D l'image du point B par la rotation R est $d=-1-3i$

b/ En déduire la nature du triangle OBD

Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points $A\left(-2;0;4\right)$, $B\left(-1;2;1\right)$ et $\Omega\left(-1;0;2\right)$.

1/ Montrer que l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω est passante par A est :
$x^2+y^2+z^2+2x-4z=0$

2/ Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-2\alpha \qquad (\alpha\in\mathbb{R}) \\ z=-3-4\alpha \end{cases}$

a/ Calculer $d(\Omega;(D))$ et en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S)

b/ Montrer que $B\in(D)$ et $(\Omega B)\perp(D)$

c/ En déduire les coordonnées de H le point de contact entre (D) et (S)

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

A/ 1/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ a/ Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

b/ Dresser le tableau de variations de f

c/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

3/ a/ Justifier que la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 a pour équation $y=x+1$

b/ Pour tout réel x on pose $g(x)=f(x)-(x+1)$

Montrer que pour tout réel x, $g'(x)=-\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ puis calculer $g(0)$.

c/ Dresser le tableau de variation de g et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

4/ Tracer (C_f) et (T) (on prend $\ln 3\simeq 1.1$)

B/ 1/ a/ Montrer que pour tout réel x, $f(x)=x \Leftrightarrow g(x)=-1$

b/ En déduire que la droite (Δ) d'équation $y=x$ coupe la courbe (C_f) en un unique point d'abscisse α tel que $2<\alpha<3$

2/ a/ Montrer que pour tout réel x, $f(x)=-1+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

b/ Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=ln\,2$.

Correction

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $I=[-1;2]$ par : $f(x)=\dfrac{4x+2}{x+3}$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1/ Etudions les variations de la fonction f sur I .

La fonction $x\mapsto\dfrac{4x+2}{x+3}$ est dérivable sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$, en particulier la fonction f est dérivable sur I . De plus $(\forall x\in I)$ $\quad f'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{(x+3)^2}=\dfrac{10}{(x+3)^2}>0$.

Donc f est strictement croissante sur I .

2/ Montrons que $f(I)\subset I$.

Puisque f est strictement croissante sur I , alors $f(I)=[f(-1);f(2)]=[-1;2]=I$.

En particulier on a : $f(I)\subset I$.

3/ Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad -1\leq u_n\leq 2$.

• Initialisation : Pour $n=0$, on a : $u_0=1$ donc $-1\leq u_0\leq 2$.

• Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $-1\leq u_n\leq 2$ et montrons que $-1\leq u_{n+1}\leq 2$.

On a : $-1\leq u_n\leq 2$, c'est-à-dire $u_n\in I$ donc $f(u_n)\in f(I)$.

C'est-à-dire $u_{n+1}\in I$. D'où : $-1\leq u_{n+1}\leq 2$.

• Conclusion : D'après le principe de récurrence on déduit que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $-1\leq u_n\leq 2$.

4/ Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{4u_n+2}{u_n+3}-u_n=\dfrac{4u_n+2-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\dfrac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+3}$

Et puisque $\dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}=\dfrac{-u_n^2+2u_n-u_n+2}{u_n+2}=\dfrac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+2}$

Alors $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}$.

5/ Etudions la monotonie de la suite (u_n) .

*/ Soit $n\in\mathbb{N}$, déterminons le signe de $u_{n+1}-u_n$

Nous avons $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}$.

Comme $-1\leq u_n\leq 2$, alors $\dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}\geq 0$ d'où : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n\geq 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

6/ Déduisons que la suite (u_n) est convergente et déterminons sa limite.

Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée (par 2) alors elle est convergente et sa limite l vérifie $f(l)=l$ et $l\in I$.

On a : $f(l)=l \Leftrightarrow \dfrac{4l+2}{l+3}=l$

$$\Leftrightarrow 4l+2=l(l+3)$$
$$\Leftrightarrow -l^2+l+2=0$$
$$\Leftrightarrow l=-1 \quad ou \quad l=2 .$$

Et puisque la suite (u_n) est croissante, alors $l>u_0$ donc $l=2$.

Exercice 2

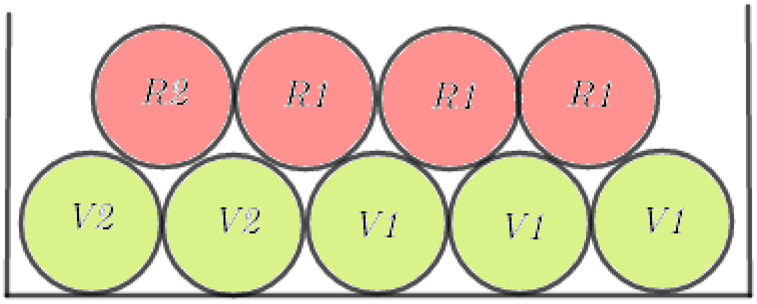
1/ On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de sac.

Soit les évènements suivants :

A * les trois boules tirées portent le même couleur *

B * les trois boules tirées portent le même numéro *

a/ Montrons que $P(A)=\dfrac{1}{6}$, $P(B)=\dfrac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\dfrac{1}{42}$ et $P(A\cup B)=\dfrac{11}{28}$.



L'éventualité Ω est un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 9.

Donc $Card(\Omega)=A_9^3=9\times 8\times 7=504$

*/ L'évènement A est réalisé si on obtient des tirages de la forme : $\{R;R;R\}$ ou $\{V;V;V\}$

Donc $Card(A)=A_4^3+A_5^3=84$

D'où $P(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{84}{504}=\dfrac{1}{6}$

*/ L'évènement B est réalisé si on obtient des tirages de la forme : $\{1;1;1\}$ ou $\{2;2;2\}$

Donc $Card(B)=A_3^3+A_6^3=126$

D'où $P(B)=\dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\dfrac{126}{504}=\dfrac{1}{4}$

*/ L'évènement $A\cap B$ est réalisé si on obtient des tirages de la forme : $\{R1,R1,R1\}$ ou $\{V1,V1,V1\}$

Donc $Card(A\cap B)=A_3^3+A_3^3=12$

D'où $P(A\cap B)=\dfrac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}=\dfrac{12}{504}=\dfrac{1}{42}$

*/ On sait que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Donc $P(A\cup B)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{42}=\dfrac{11}{28}$

b/ Calculons $P_A(B)$.

On sait que $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$. Donc $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{42}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{7}$

2/ On tire simultanément trois boules de sac et soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros tirées.

Précisons la loi de probabilité de X

*/ On a 4 possibilités pour X :

Les trois boules portent le numéro 1, donc $X=3$

Deux boules portent le numéro 1 et une boule porte le numéro 2, donc $X=4$

Deux boules portent le numéro 2 et une boule porte le numéro 1, donc $X=5$

Les trois boules portent le numéro 2 donc $X=6$

*/ On résume les tirages possibles pour obtenir X dans le tableau suivant :

X	3	4	5	6
les tirages possibles pour obtenir X	$\{1;1;1\}$	$\{1;1;2\}$	$\{2;2;1\}$	$\{2;2;2\}$

*/ Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X

$$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{20}{84}=\frac{5}{21}$$

$$P(X=4)=\frac{C_6^2C_3^1}{C_9^3}=\frac{45}{84}=\frac{15}{28}$$

$$P(X=5)=\frac{C_3^1C_6^1}{C_9^3}=\frac{18}{84}=\frac{3}{14}$$

$$P(X=6)=\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{84}$$

*/ Une autre méthode pour calculer $P(X=6)$

O sait que $P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=1$

Donc $P(X=6)=1-P(X=3)-P(X=4)-P(X=5)$

C'est-à-dire $P(X=6)=1-\frac{5}{21}-\frac{15}{28}-\frac{3}{14}$

Ce qui donne $P(X=6)=\frac{1}{84}$

*/ On résume la loi de probabilité de la variable X dans le tableau suivant :

$X=k$	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

*/ Calculons l'espérance $E(X)$

On sait que $E(X)=3\times P(X=3)+4\times P(X=4)+5\times P(X=5)+6\times P(X=6)$

$$=\frac{15}{21}+\frac{60}{28}+\frac{15}{14}+\frac{6}{84}$$

$$=4$$

Exercice 3

1/ Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2-6z+10=0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta=(-6)^2-4\times10=-4=(2i)^2$.

Les solutions de cette équation sont $z_1=\frac{6+2i}{2}=3+i$ et $z_2=\frac{6-2i}{2}=3-i$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2-\sqrt{2}$, $b=3-i$ et $c=\bar{b}$.

a/ Montrons que $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$.

Nous avons : $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{3+i-(2-\sqrt{2})}{3-i-(2-\sqrt{2})}$

$$=\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{2}+i\right)\left(1+\sqrt{2}+i\right)}{\left(1+\sqrt{2}-i\right)\left(1+\sqrt{2}+i\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{2}+i\right)^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-(i)^2}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)i+(i)^2}{\left(1+2\sqrt{2}+2\right)-1}$$

$$=\frac{3+2\sqrt{2}+2\left(1+\sqrt{2}\right)i-1}{2+2\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}+2\left(1+\sqrt{2}\right)i}{2+2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)+2\left(1+\sqrt{2}\right)i}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)[1+i]}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}=1+i$$

b/ Déduisons que $\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

Nous avons : $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(cos(\dfrac{\pi}{4})+isin(\dfrac{\pi}{4})\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Donc $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv\arg\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)[2\pi]$

Donc $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

C'est-à-dire $\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

c/ Montrons que $\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)^{20}=-2^{10}$

Nous avons $\dfrac{c-a}{b-a}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Donc $\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{20}=\sqrt{2}^{20}e^{i5\pi}=2^{10}\times(-1)=-2^{10}$

3/ Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$

a/ Montrons que l'affixe du point D l'image du point B par la rotation R est $d=-1-3i$

Soit d l'affixe du point D l'image du point B par la rotation R

Donc $d-z_O=(b-z_O)e^{i(\frac{3\pi}{2})}$

C'est-à-dire $d-0=((3-i)-0)\times(-i)$

Ou encore $d=-3i-i^2=-3i+1$

D'où $d=-1-3i$

b/ Déduisons la nature du triangle OBD

Puisque le point D est l'image du point B par la rotation R

Alors $OB = OD$ et $\left(\overline{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD}}\right) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$

Donc $OB = OD$ et $(OB)\perp(OD)$

D'où le triangle OBD est rectangle et isocèle en O

Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-2;0;4)$, $B(-1;2;1)$ et $\Omega(-1;0;2)$.

1/ Montrons que l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω est passante par A est :

$x^2+y^2+z^2+2x-4z=0$

Calculons le rayon R de la sphère (S) e

On a $R=\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}$

$=\sqrt{(-2+1)^2+(0-0)^2+(4-2)^2}$

$=\sqrt{5}$

La sphère (S) est de centre $\Omega(-1;0;2)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$ donc son équation cartésienne est :

$(x+1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=\sqrt{5}^2$

Ou encore : $x^2+2x+1+y^2+z^2-4z+4=5$

Finalement : $x^2+y^2+z^2+2x-4z=0$

2/ Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-2\alpha \\ z=-3-4\alpha \end{cases} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

a/ Calculons $d(\Omega;(D))$ et déduisons que la droite (D) est tangente à la sphère (S)

On sait que $d(\Omega;(D))=\frac{\left\|\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ tel que $\vec{u}(1;-2;-4)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et $C(0;0;-3)\in(D)$ (d'après la représentation paramétrique de (D))

Donc $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$

Nous avons $\overrightarrow{C\Omega}(-1;0;5)$ donc $\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$

C'est-à-dire $\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}=10\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

Donc $\left\|\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{10^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{105}=\sqrt{21}\times\sqrt{5}$

Donc $d(\Omega;(D))=\frac{\left\|\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}=\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=R$

b/ Montrons que $B\in(D)$ et $(\Omega B)\perp(D)$

*/ Nous avons $B(-1;2;1)\in(D)\Leftrightarrow(\exists!\alpha\in\mathbb{R})/\begin{cases} -1=\alpha \\ 2=-2\alpha \\ 1=-3-4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow(\exists!\alpha\in\mathbb{R})/\begin{cases} \alpha=-1 \\ \alpha=-1 \\ \alpha=-1 \end{cases}$. Donc $B\in(D)$

*/ Montrons que $(\Omega B)\perp(D)$

Il suffit de montrer que $\vec{u}.\overrightarrow{\Omega B}=0$

Nous avons $\vec{u}(1;-2;-4)$ et $\overrightarrow{\Omega B}(0;2;-1)$ donc $\vec{u}.\overrightarrow{\Omega B}=1\times 0+(-2)\times 2+(-4)\times(-1)=0$

Donc $(\Omega B)\perp(D)$

c/ Déduisons les coordonnées de H le point de contact entre (D) et (S)

Soit H le point de contact entre (D) et (S)

Donc $H\in(D)$ et $(\Omega H)\perp(D)$

Donc d'après la question précédente en déduit que $H=B$

Par suite $H\left(-1;2;1\right)$

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

A/ 1/ a/ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interprétons graphiquement les résultat obtenus.

*/ Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(3-\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{1}{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-0}{1+0}=3$

*/ Nous avons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\times 0-1}{0+1}=-1$

<u>Interprétation géométrique</u>

*/ Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

Donc la droite d'équation $y=3$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

*/ Nous avons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

Donc la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

2/ a/ Montrons que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

Nous avons $f'(x)=\left(\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}\right)'$

$$=\frac{\left(3e^x-1\right)'\left(e^x+1\right)-\left(3e^x-1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{3e^x\left(e^x+1\right)-\left(3e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{3e^{2x} + 3e^{x} - 3e^{2x} + e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$= \frac{4e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

b/ Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3

c/ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Nous avons $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}=0$

$$\Leftrightarrow 3e^{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\ln(\frac{1}{3})$$

$$\Leftrightarrow x=-\ln(3)$$

3/ a/ Justifions que la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 a pour équation $y=x+1$

L'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 est donnée par : $(T):\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

Or $f(1)=\dfrac{3e^{0}-1}{e^{0}+1}=1$ et $f'(0)=\dfrac{4e^{0}}{(e^{0}+1)^{2}}=1$

Donc $(T):\ y=1(x-0)+1$ finalement $(T):\ y=x+1$

b/ Pour tout réel x on pose $g(x)=f(x)-(x+1)$

Montrons que pour tout réel x, $g'(x)=-\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$ puis calculer $g(0)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$

*/ Nous avons $g'(x)=f'(x)-(x+1)'$

$$= \frac{4e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}-1=\frac{4e^{x}-\left(e^{x}+1\right)^{2}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{4e^{x}-e^{2x}-2e^{x}-1}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$= \frac{-e^{2x}+2e^{x}-1}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{-\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{-\left(e^{x}-1\right)^{2}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

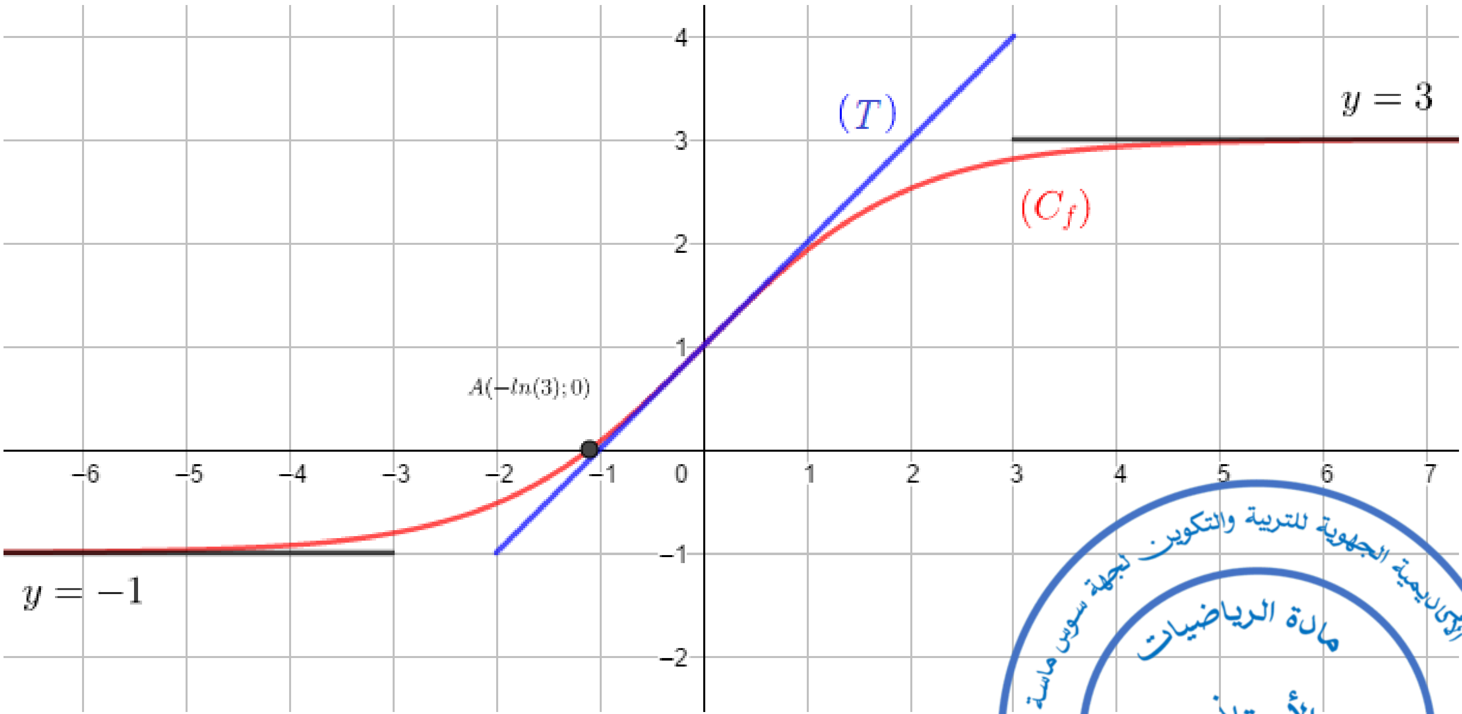
$$= -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

*/ Nous avons $g(0) = f(0) - (0+1) = 1 - 1 = 0$

c/ Dressons le tableau de variation de g déduisons le signe de g sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	↘	0	↘
$g(x)$	$+$	0	$-$

4/ Tracer (C_f) et (T)



B/ 1/ a/ Montrons que pour tout réel x, $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = -1$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Nous avons $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) - x - 1 = -1 \Leftrightarrow g(x) = -1$

b/ Déduisons que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) en un unique point d'abscisse α tel que $2 < \alpha < 3$

Il suffit de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α tel que $2 < \alpha < 3$

D'après la question précédente il suffit de déduire qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = -1$ et $2 < \alpha < 3$

Appliquons T.V.I sur la fonction g sur l'intervalle $I = [2;3]$

Puisque g est continue, strictement décroissante sur I et $g(3) = -1.19 < -1 < g(2) \simeq -0.48$ alors $-1 \in g([2;3])$

donc d'après le T.V.I. il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = -1$ et $2 < \alpha < 3$

Finalement la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) en un unique point d'abscisse α tel que

$2 < \alpha < 3$

2/ a/ Montrons que pour tout réel x, $f(x) = -1 + \dfrac{4e^x}{e^x + 1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Nous avons $-1 + \dfrac{4e^x}{e^x+1} = \dfrac{-\left(e^x+1\right) + 4e^x}{e^x+1} = \dfrac{3e^x - 1}{e^x+1} = f(x)$

Donc pour tout réel x, $f(x) = -1 + \dfrac{4e^x}{e^x+1}$

b/ Calculons l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = ln\,2$.

Remarquons que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;\ln 2]$ (car $f\left([0;\ln 2]\right) = \left[1;\dfrac{5}{3}\right]$)

Donc l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = ln\,2$ est : $A = \int_0^{\ln 2} f(x)dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

Nous avons
$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} f(x)dx &= \int_0^{\ln 2} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}dx \\ &= \int_0^{\ln 2}\left(-1 + \frac{4e^x}{e^x+1}\right)dx \\ &= \int_0^{\ln 2}\left(-1 + 4\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\right)dx \\ &= \left[-x + 4\ln(e^x+1)\right]_0^{\ln 2} \\ &= -\ln 2 + 4\ln 3 - 4\ln 2 \\ &= 4\ln 3 - 5\ln 2\end{aligned}$$

Ainsi : $A = \left(4\ln 3 - 5\ln 2\right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$